Список обязательных задач по теорминимуму ИТФ НАН Украины.

Первая группа

- МАТЕМАТИКА I.
- МЕХАНИКА.

Вторая группа

- МАТЕМАТИКА II.
- ЭЛЕКТРОДИНАМИКА.
- ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.
- КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА.
- СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА.

Третья группа

- МАТЕМАТИКА III.
- ФИЗИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА И ГИДРОДИНАМИКА.
- КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА.
- КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ.

МАТЕМАТИКА I.

I. Комплексные числа

19. Найти корни уравнения:

$$\left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^n = \frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}.$$

31. Доказать равенства:

$$\operatorname{tg} n\varphi = \frac{C_n^1 \operatorname{tg}\varphi - C_n^3 \operatorname{tg}^5\varphi + C_n^5 \operatorname{tg}^5\varphi - \ldots}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2\varphi + C_n^4 \operatorname{tg}^4\varphi - \ldots};$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}.$$

35. Вычислить сумму:

$$1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \ldots + 2\cos nx.$$

47. Найти величину:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-i}.$$

95. Доказать тождество:

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

99. Вычислить произведение

$$(x_1^2+1)(x_2^2+1)\ldots(x_n^2+1),$$

где $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ – корни полинома $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$; $a_1,\ \ldots,\ a_n$ вещественные.

104. Найти зависимость между коэффициентами полинома $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$, если между его корнями имеется зависимость: $x_1x_2 + x_2x_3 = 2x_1x_3$.

121. При каких значениях p и q уравнение $x^5 + px + q = 0$ имеет три вещественных корня?

169. Разложить на простейшие дроби:

$$\frac{1}{x^{2n+1}+1}.$$

177. Доказать равенство:

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \ldots + \frac{1}{1-x_{n-1}} = \frac{n-1}{2},$$

где x_ν – корни уравнения $x^n = 1$, отличные от единицы.

II. Основы линейной алгебры

Вычислить определители:

185.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}.$$

188.

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}.$$

196. Доказать равенство:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \dots & \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{2} & \binom{x_2}{2} & \dots & \binom{x_n}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & \dots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{1!\,2!\,3!\dots(n-1)!},$$

где $\binom{x}{m} = \frac{x(x-1)\dots(x-m+1)}{1\cdot 2\dots m}$, Δ – определитель Вандермонда.

Доказать равенства:

203.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\dots\varphi(\alpha_n),$$

где $\varphi(\alpha) = a_i + a_2\alpha + \ldots + a_n\alpha^{n-1}$; α – корень уравнения $\alpha^n = 1$.

204.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2}.$$

208. Элементы определителя порядка n связаны равенствами $a_{\nu\nu=0}$, $a_{\nu\mu} = ia_{\mu\nu}$, $\nu > \mu$, где $a_{\mu\nu}$ – вещественное число. Найти значения n, при которых определители имеют вещественное значение при любом выборе $a_{\mu\nu}$.

218. Решить систему уравнений:

$$x - 4y + 2z = -1,$$
$$2x - 3y - z - 5t = -7,$$
$$3x - 7y + z - 5t = -8,$$
$$y - z - t = -1.$$

221. Решить систему:

$$x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1,$$
$$x_1 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 2,$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} = n.$$

222. Показать, что в том случае, когда определитель Δ, составленный из n^2 элементов $a_{\mu\nu}$, равен нулю, имеет место пропорциональность $\frac{A_{1\mu}}{A_{1\nu}} = \frac{A_{2\mu}}{A_{2\nu}} = \ldots = \frac{A_{n\mu}}{A_{n\nu}}$, где A_{kl} – алгебраическое дополнение элемента a_{kl}.

229. При каких условиях n плоскостей $A_\nu x + B_\nu y + C_\nu z + D_\nu = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, пересекаются в одной точке или по одной прямой?

III. Матрицы

231. Найти вид элементов прямоугольной матрицы

$$\left\Vert \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{matrix} \right\Vert,$$

ранг которой равен единице.

232. Показать, что матрица ранга r может быть представлена в виде суммы r матриц ранга 1. Какое следствие для билинейных форм вытекает отсюда?

236. В каком случае матрица A линейного преобразования $y_\nu = a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \ldots + a_{\nu n}x_n$ удовлетворяет условию $AA_1 = E$, где E – единичная матрица, а A_1 – транспонированная матрица A?

237. Найти вещественные корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = 0$$

при условии, что $a_{\nu\mu} = -a_{\mu\nu}$ и все $a_{\nu\mu}$ вещественные.

240. Доказать, что корни характеристического уравнения матрицы с элементами $a_{\mu\nu}$ имеют вещественную часть, заключающуюся между наибольшим и наименьшим корнями характеристического уравнения симметрической матрицы с элементами $b_{\mu\nu}$, где $2b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + a_{\nu\mu}$. При этом все $a_{\mu\nu}$ вещественные.

241. Найти границы величины вещественной части корня характеристического уравнения кососимметрической матрицы с вещественными элементами.

246. Элементы матрицы $((b_{\mu\nu}))$ определяются последовательно по формулам: $b_{\mu+1,\nu} = b_{\mu 1}a_{1\nu} + b_{\mu 2}a_{2\nu} + \ldots + b_{\mu n}a_{n\nu}$; $\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, где $b_{11},\ b_{12},\ \ldots,\ b_{1n}$ и $a_{\mu\nu}$ – данные числа. Найти величину произведения определителей

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-x \end{vmatrix}.$$

254. Представить в виде суммы квадратов следующие квадратичные формы:

$$8x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 6yz + 4xz - 2xy.$$

257. Формы $\sum\limits_{\mu=1}^{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu$, $\sum\limits_{\mu=1}^{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu}x_\mu x_\nu$ положительны. Доказать, что и форма $\sum\limits_{\mu=1}^{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}b_{\mu\nu}x_\mu y_\nu$ положительна.

302. Узнать, имеют ли общий корень полиномы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

$$\varphi(x) = x^5 + x^2 + 1, \qquad \psi(x) = x^5 - x^3 + 2.$$

304. Решить систему уравнений:

$$5x^2 - 5y^2 - 3x + 9y = 0,$$

$$5x^3 + 5y^3 - 15x^2 - 13xy - y^2 = 0.$$

309. Найти дискриминант $x^n + a = 0$.

IV. Функции многих переменных

V. Интегралы

Найти величины следующих интегралов:

563. $\int \frac{xdx}{x^3-6x^2+16x-6}$.

570. $\int \frac{9x^2-14x+1}{x^3-2x^2-x+2}dx$.

584. Найти интеграл:

$\int \frac{x^6+16}{x^4-4}dx$.

589. Найти интеграл с помощью формулы приведения:
$\int \frac{dx}{(x^2+1)^5}$.

Пользуясь тождеством: $4a(ax^2+bx+c)-(2ax+b)^2=4ac-b^2$ и интегрируя по частям интеграл $\frac{(2ax^2+b)^2dx}{(ax^2+bx+c)^n}$, можно доказать формулу приведения:

$$(4ac-b^2)u_n = \frac{2n-3}{n-1}\cdot 2au_{n-1} + \frac{1}{n-1}\cdot\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}},$$

где

$$u_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

627. Найти интеграл $A=\int\frac{dx}{x^4+1}$, введя вспомогательный интеграл $B=\int\frac{x^2dx}{x^4+1}$ и заметив, что интегралы $A+B$ и $A-B$ берутся с легкостью после подстановок $x-\frac{1}{x}=u$ и $x+\frac{1}{x}=v$.

630. Найти интеграл $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$, переведя иррациональность в знаменатель.

Найти интегралы:

644. $\int\frac{dx}{(\sqrt{x+2}+1)\sqrt{x+2-1}}$.

665. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+7}}$.

710. $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-2x-1}}$.

714. $\int\frac{(x^3+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

728. $\int\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x^2})dx$.

737. $\int\frac{x\arcsin x dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

824. $\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$.

827. $\int\frac{x+\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x}dx$.

VI. Кратные интегралы

Найти площади кривых:

848. Петли листа Декарта $x^3+y^3=3axy$.

850. Подэры эллипса $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$.

Найти площади кривых, заданных в полярных координатах:

860. Эллипса $r=\frac{p}{1+e\cos\varphi},\ e<1,\ 0<\varphi<\varphi_0$.

863. Кривой $r=a\sqrt{1+\omega^2},\ \varphi=\omega-\operatorname{arctg}\omega,\ 0<\omega<\omega_0$.

Найти длины дуг следующих кривых в пространстве:

890. $y^2=2ax-x^2,\ z=-a\ln\left(1-\frac{x}{2a}\right);\ 0<x<x_0$.

895. Парабола $4ay=x^2$ катится по оси Ox. Доказать, что ее фокус описывает цепную линию $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

Найти объем тел, полученных при вращении следующих линий:

904. Эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси Ox.

Найти объемы тел, ограниченные поверхностями:

915. $y^2+z^2=a^2\operatorname{ch}^2\frac{x}{a},\ -b<x<b$.

Найти поверхности, полученные вращением указанных кривых вокруг данных осей:

927. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b$; около Oy. (Сплюснутый эллипсоид.)

933. $x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$ (трактриса) около Ox.

942. Переменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$.

945. Ввести вместо x и y новые переменные и определить пределы интегрирования по новым переменным для следующих интегралов:

$\int\int\limits_S f(x,y)dxdy$, если $x=u\cos v,\ y=\sin v$, а площадь S определена неравенствами: $x>0,\ y>0,\ x^2+y^2<a^2$.

Найти площади, ограниченные кривыми:

979. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{xy}{c^2}$(площадь петли).

994. $\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_0}+\frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u_0}=c^2,\ \frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_1}+\frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u_1}=c^2;\ u_1>u_0,\ x>0;$
$\frac{x^2}{\cos^2 v_0}-\frac{y^2}{\sin^2 v_0}=c^2,\ \frac{x^2}{cos^2 v_1}-\frac{y^2}{\sin^2 v_1}=c^2;\ v_1>v_0,\ y>0.$

Найти объемы, ограниченные поверхностями:

1036. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4+\frac{z^2}{c^2}=1;\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

Найти величины поверхностей, указанных в следующих задачах.

1053. Части цилиндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}=1;\ a>b$.

1064. $x^2+y^2=z^2$ внутри цилиндра $(x^2+y^2)^2=2xy$ при $z\geq 0$.

Найти величины криволинейных интегралов:

1080. Найти интеграл $\int\limits_{AB} x^2ds$, где путь интегрирования – верхняя половина окружности $x^2+y^2=a^2$ между точками $A(a,0)$ и $B(-a,0)$.

Найти объемы, ограниченные поверхностями:

1149. $(x^2+y^2+z^2)^5=(a^3x^2+b^3y^2+c^3z^2)^2$.

1155. $(x^2+y^2+z^2)^2=\frac{a^6}{x^2+y^2}$.

1172. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\sin\frac{\pi\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}};\ x>0,\ y>0.$

Найти координаты центра тяжести однородных тел, ограниченных следующими поверхностями.

1193. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1;\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

1207. На каждой прямой $\mathcal{J}$, проходящей через центр тяжести тела, отложен отрезок, длиной $\frac{1}{\sqrt{J_{\mathcal{J}}}}$. Доказать, что концы этих отрезков лежат на эллипсоиде

$$Ax^2+By^2+Cz^2-2Dxy-2Exy-2Fyz=1;$$

этот эллипсоид называется эллипсоидом инерци данного тела.

1226. Доказать равенство $\int\int\limits_{s}\cos(\mathbf{n},x)d\sigma=0$, где S – замкнутая поверхность, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к ней.

1230. Применяя формулу Гаусса к вектору $u\,\mathrm{grad}\,v$, получить формулу Грина:

$$\int\int\limits_{\omega}\int\left[u\Delta v+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right]d\omega=-\int\int\limits_{\sigma}u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma.$$

Здесь ω – объем, σ – его поверхность, $\frac{\partial v}{\partial n}$, равная $\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma$, – производная по внутренней нормали, и

$$\triangle v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

1237. Доказать формулу для гармонической функции двух переменных $u(x,\,y)$:

$$\int\limits_{S}\frac{\partial u}{\partial n}ds=0.$$

1249. Доказать равенство Римана:

$$\int\int\limits_{\sigma}[uF(v)-vG(u)]d\sigma=\int\limits_{S}(Mdx+Ndy).$$

Здесь S – контур площади σ,

$$F(v)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-a\frac{\partial v}{\partial x}-b\frac{\partial v}{\partial y}-cv,$$

$$G(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}-cu,$$

где $M=-u\frac{\partial v}{\partial x}+buv;\ N=-v\frac{\partial u}{\partial y}-auv.$

Найти следующие интегралы:

1278. $\int\limits_0^1\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n.$

1280. При прежних обозначениях очевидны равенства:

$$v_n=\int\int\limits_{x_1^2+x_2^2<1}dx_1dx_2\int\int\ldots\int\limits_{x_3^2+x_4^2+\ldots+x_n^2<1-x_2^2-x^n}dx_3dx_4\ldots dx_n=$$

$$\iint\limits_{x_1^2+x_2^2<1} (1-x_1^2-x_2^2)^{\frac{n}{2}-1} v_{n-2} dx_1 dx_2.$$

Пользуясь ими, доказать, что

$$u_n(a) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} a^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

где

$$u_n(a) = \iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2<a^2} \ldots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

В частности, $u_1 = 2a,\ u_2 = \pi a^2,\ u_3 = \frac{4}{3}\pi a^3,\ u_4 = \frac{\pi^2}{2} a^4, \ldots$

VII. Обыкновенные дифференцальные уравнения

1322. Определить постоянные a и b так, чтобы выражение

$$\frac{(ax^2+2xy+y^2)dx-(x^2+2xy+by^2)dy}{(x^2+y^2)^2}$$

было полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, и найти эту функцию.

1342. Проинтегрировать уравнение:
$y' = (x-y)^2+1$.

1355. Найти общий интеграл уравнения

$$(y-x)\sqrt{1+x^2}dy = (1+y^2)^{\frac{3}{2}}dx,$$

применив подстановку:

$$x = \operatorname{tg} u,\ y = \operatorname{tg} v.$$

Решить уравнения:

1387. $(x-2y+5)dx+(2x-y+4)dy = 0$.

1398. Найти частный интеграл, который обращается в y_0 при $x = x_0$.
$y' + y\cos x = \sin x \cos x;\ x_0 = 0,\ y_0 = 1$.

1420. $\int\limits_0^\infty \sqrt{1+y'^2}dx = 2\sqrt{x}+y$. Найти y.

1434. $5y' + y^2 = x^{-\frac{12}{5}}$.

Интегрировать уравнение с множителем одного из видов $M = f(x+y)$ или $M = f(xy)$:

1456. $xy^2dx + (x^2y - x)dy = 0$.

Найти интегралы уравнений:

1461. $(x^2+y^2+y)dx - xdy = 0$.

1480. Определив функцию $x = \operatorname{sn} u$ равенством

$$u = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1-k^2x^2)}}$$

и введя функции $\sqrt{1-x^2} = \operatorname{cn} u$, $\sqrt{1-k^2x^2} = \operatorname{dn} u$, доказать равенство:

$$\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} = \operatorname{sn}(u+v).$$

Решить уравнения:

1497. $x = \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$.

Найти особенные решения уравнений:

1525. $(xy'+y)^2 + 3x^5(xy'-2y) = 0$.

1661. Найти общий вид функций $u = f(x^2+y^2+z^2)$, удовлетворяющих уравнению Лапласа от трех переменных: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

1710. Написать общие интегралы линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0$.

1721. Найти общие интегралы следующих неоднородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$y'' + y = 2\sin x \sin 2x$.

1795. Найти решение уравнения Стокса

$$x^2(1-x)^2y'' + \beta y = \beta x^2(1-x^2)$$

такое, что $y = y' = 0$ при $x = 0$.

1799. Решить систему:

$\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x+y} = \frac{dz}{z}$.

1811. Решить систему уравнений, выделив решение, удовлетворяющее начальным данным:

$\frac{dy}{dx} + 3y + z = 0$, $\frac{dz}{dx} - y + z = 0$; $y = z = 1$ при $x = 0$.

VIII. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка

Найти общий интеграл уравнений:

1856. $xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = x$.

1865. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z + a\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1872. $(x+y)\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

1915. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$(y^2 - x^2 + 2xz)\frac{\partial z}{\partial x} + 2y(z-x)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

и заключающую эллипс $x = 0,\ y^2 + 4z^2 = 4a^2$.

1921. Среди функций, удовлетворяющих уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, найти такую, которая удовлетворяет и уравнению $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{a^2}{x^2+y^2}$.

1932. Интегрировать системы уравнений, где для краткости положено $\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i$.

$$\begin{cases} p_1 - 2p_2 - p_4 x_4^2(1 + x_1) = 0, \\ p_1 + p_2 x_1 + p_3 x_1 x_3^2 = 0. \end{cases}$$

1951. Проинтегрировать уравнения:

$dx_3 = \frac{x_3+x_2}{x_1-x_2}dx_1 - \frac{x_1+x_3}{x_1-x_2}dx_2$,

$dx_4 = \frac{x_4+x_2}{x_1-x_2}dx_1 - \frac{x_4+x_1}{x_1-x_2}dx_2$.

Найти полные интегралы следующих уравнений.

1974. $p_1^2 + p_2^2 = \omega(\sqrt{x^2+y^2})$, введя полярные координаты.

1997. $(p_1x_1 + p_2x_2)^2 - z(p_1x_1 + p_2x_2) + p_1^2 + p_2^2 = 0$.

IX. Определенные интегралы

2042. Исходя из формулы

$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1)$,

получить величину интеграла Пуассона:

$\int\limits_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos\varphi + x^2)d\varphi = 0$ при $|x| < 1$ и $\pi\ln(x^2)$ при $|x| > 1$.

2088. В переписке Эйлера и Лагранжа интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$, равный $\ln\frac{b}{a}$ при $b > a > 0$, преобразуется так:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}dx = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-ax}dx}{x} - \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-bx}dx}{x}.$$

В правой части первый интеграл преобразуется подстановкой $ax = t$, а второй – подстановкой $bx = t$. После этого получается:

$$\ln\frac{b}{a} = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}dx = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t}dt}{t} - \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t}dt}{t} = 0.$$

Где причина полученного абсурда?

Доказать равенства:

2093. $\int\limits_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} x dx = \frac{\pi}{8}(b-a)(a+3b)$.

2104. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Найти величины интегралов:

2116. $\int\limits_0^1 (1-x^2)^n dx$.

2147. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$.

2170. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^2 x dx}{(1-2a\cos x+a^2)(1-2b\cos x+b^2)}$.

2187. $\int\limits_0^{\infty} (e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}) dx$.

2221. $\int\limits_0^1 x\sqrt[3]{1-x^3} dx$.

2257. Доказать равенства:

$\lim\limits_{n\to 0} \alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+u)du}{a^2+u^2} = \pi \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$,

если интеграл абсолютно сходящийся, а $f(x+0)$ и $f(x-0)$ – правый и левый пределы $f(\xi)$ при $\xi \to x$.

2312. Доказать тождество Рамануджана:

$$\sqrt{\alpha}\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}dx}{\mathrm{ch}\alpha x} = \sqrt{\beta}\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}dx}{\mathrm{ch}\beta x};\ \alpha\beta = \pi.$$

2316. С помощью подстановки $\frac{x-a}{b-x} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{e^t}{e^{-t}}$ доказать равенство:

$\int\limits_a^b [(x-a)(b-x)]^{-\frac{3}{2c}-\left(\frac{\alpha^2}{x-a}+\frac{\beta^2}{b-x}\right)} dx = \sqrt{\pi}\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}(b-a)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{2\alpha\beta}{b-a}}$.

X. Ряды. Ряды Фурье

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, 2002.

2. Гюнтер, Кузьмин, 19xx.

3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа. Москва, Высшая школа, 1981.

МЕХАНИКА

I. Движение при наличии связей.

II. Варицонные принципы в механике.

III. Движение в центральном поле.

1.1. Определить закон движения частицы в поле $U(x)$:

$$a)U(x) = A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}),$$

$$b)U(x) = -\frac{U_0}{ch^2\alpha x},$$
$$c)U(x) = U_0 tg^2\alpha x.$$

1.3. Определить приближенно закон движения частицы в поле $U(x)$ вблизи точки остановки $x = a$.
*Указание.*Воспользоваться разложением $U(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки $x = a$. Рассмотреть случаи $U'(a) \neq 0$, и $U'(a) = 0$, $U''(a) \neq 0$.

1.4. Определить, по какому закону обращается в бесконечность период движения частицы в поле $U(x)$ при приближении энергии E к U_m.

1.8. Определить изменение закона движения частицы на участке, не содержащим точки остановки, вызванное добавлением к полю $U(x)$ малой добавки $\delta U(x)$.

2.1. Описать качественно характер движения частицы в поле $U(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\gamma}{r^3}$ при различных значениях момента импульса и энергии.

2.4. Определить траекторию частицы в поле $U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$. Найти время падения частицы в центр поля с расстояния r. Сколько оборотов вокруг центра сделает при этом частица?

2.5. Определить траекторию частицы в поле $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$. Найти угловое расстояние $\Delta\varphi$ между двумя последовательными прохождениями перигелия(точки $r = r_{min}$), период радиальных колебаний T_r и период обращения T_φ. При каком условии траектория окажется замкнутой?

2.9. Частица в поле $U(r)$ уходит на бесконечность с расстояния $r \neq 0$. Будет ли число оборотов, сделанных ею вокруг центра, конечным?

$$a)U(r) = \alpha r^{-n},$$

$$b)U(r) = -\alpha r^{-n}.$$

2.14. Найти область, недостижимую для пучка частиц, летящих из бесконечности со скоростью v параллельно оси z и рассеиваемых полем $U(r) = \frac{\alpha}{r}$.

2.17. Определить изменение зависимости периода T радиальных колебаний точки в центральном поле $U(r)$ от энергии и момента, вызванное изменением поля на малую величину $\delta U(r)$.

2.30. Найти траекторию и закон движения заряженной частицы в магнитном поле $\mathcal{H} = \frac{g\mathbf{r}}{r^3}$ (поле магнитного монополя).
Подобный вид имеет магнитное поле тонкого длинного соленоида вне его в точках, удаленных от его торца на расстояние, большое по сравнению с диаметром соленоида, но малое по сравнению с его длиной.

2.36. Исследовать влияние малой добавки $\delta U(r) = \mathbf{Fr}$ к кулоновскому полю на финитное движение частицы.
а)Найти среднюю (за период) скорость изменения момента импульса.
б) Определить зависимость от времени момента импульса, размеров и ориентации орбиты, если сила $\mathbf{F}$ лежит в плоскости орбиты.
в) Тот же вопрос при произвольной ориентации силы.
Указание. Составить и решить усредненные по периоду уравнения движения для векторов $\mathbf{M} = m[\mathbf{rv}]$и $\mathbf{A} = [\mathbf{vM}] - \frac{\alpha\mathbf{r}}{r}$.

3.2. Найти поверхность вращения, сечение упругого рассеяния на которой совпадает с резерфордовским.

3.9. Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния частиц в поле $U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$.

3.11. Поток частиц, скорости которых первоначально параллельны оси z, рассеивается на неподвижном эллипсоиде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

. Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния, если эллипсоид: а)гладкий упругий; б)гладкий неупругий; в)шероховатый упругий.

3.14. Определить усредненное по времени дифференциальное эффективное сечение рассеяния как функцию приобретаемой частицами энергии при рассеянии в поле $U(r,t) = (V_1 + V_2 \sin\omega t)e^{-\chi^2 r^2}$ быстрых частиц ($E \gg V_{1,2}$).

IV. Колебания.

5.2. Найти частоту малых колебаний системы. Система вращается в поле тяжести вокруг вертикальной оси с угловой скоростью Ω.

5.9. Найти установившиеся малые колебания плоского маятника, точка подвеса которого равномерно движется по окружности радиуса a с частотой Ω. Длина маятника l ($l \gg a$).

5.12. Определить энергию E, приобретенную осцилятором под действием силы $F(t) = e^{-(t/\tau)^2}$ за все время ее действия, если при $t = -\infty$
а)осциллятор покоился;
б)амплитуда колебаний была равна a.

5.15. Осциллятор может колебаться только вдоль оси z . Найти дифференциальное эффективное сечение возбуждения осциллятора до энергии ε быстрой частицей, взаимодействующей с ним по закону $U(r) = Ve^{-\chi^2 r^2}$. Скорость частицы v_∞ параллельна оси z, ее энергия $E \gg V$. Начальная энергия осциллятора ε_0.

6.11. Найти свободные малые колебания двойного маятника, если в начальный момент верхний маятник вертикален, нижний отклонен на угол $\beta \ll 1$, а скорости их равны нулю. Массы маятников M и m, причем $M \gg m$.

6.18. Найти нормальные колебания трех одинаковых частиц, связанных одинаковыми пружинками и могущих двигаться по кольцу.
Определить нормальные координаты, приводящие функцию Лагранжа к сумме квадратов.

6.30. Какие из нормальных колебаний системы мало изменяются при малом изменении системы, состоящем в следующем:
а)жесткость пружины 1-2 изменена на малую величину δk;
б)к частице 3 добавлен малый перегрузок δm;
в)к частице 1 добавлен перегрузок δm_1, а к частице 2 - δm_2?

6.31. Для случаев а) и б) задачи 6.30. описать свободные колебания, если в начальный момент частицы 1 и 3 смещены навстречу друг другу на одинаковые расстояния. Начальные скорости частиц равны нулю.

6.36. Определить свободные колебание анизотропного заряженного осциллятора с потенциальной энергией $U(\mathbf{r}) = \frac{m({\omega_1}^2x^2 + {\omega_2}^2y^2 + {\omega_3}^2z^2)}{2}$ в однородном магнитном поле $\mathcal{H}$, параллельном оси z. Рассмотреть, в частности, подробнее предельные случаи:

$$a)|\omega_{\mathcal{H}}| \ll |\omega_1 - \omega_2|;$$

$$b)|\omega_{\mathcal{H}}| \gg \omega_{1,2};$$

$$c)\omega_1 = \omega_2 \gg |\omega_{\mathcal{H}}|$$

(здесь $\omega_{\mathcal{H}} = \frac{e\mathcal{H}}{mc}$).

7.1. Определить нормальные колебания системы N одинаковых частиц массы m,связанных одинаковыми пружинками жесткости k и могущих двигаться по прямой.
*Указание.*Удобно искать нормальные колебания в виде суперпозиции бегущих волн.

7.3. Найти свободные колебания N частиц, соединенных пружинками и могущих двигаться по кольцу. Массы всех частиц и жесткости пружинок одинаковы. Пусть движение представляет собой бегущую по кольцу волну. Проверить, что поток энергии равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость.

7.9. а)К одному концу исскуственной линии подключен источник переменного напряжения $U \cos \gamma t$. Какое комплексное сопротивление $Z(\gamma)$ следует подключить к другому концу линии, чтобы колебания в ней представляли собой бегущую волну, т.е. чтобы напряжение на каждом из конденсаторов отличалось от напряжения на соседнем только определенным сдвигом фазы?]
б)То же для другой исскуственной линии.

8.7. а) Определить амплитуду и фазу установившегося колебания осциллятора при параметрическом резонансе:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2(1 + h\cos 2\omega t)x + \beta x^3 = 0$$

$$(h \ll 1, |\omega - \omega_0| \ll \omega_0, \beta x^2 \ll \omega_0^2)$$

б)Определить амплитуду третьей гармоники установившегося колебания.

V. Движение твердого тела.

9.4. Найти главные моменты инерции шара радиуса R, имеющего внутри полость в форме шара радиуса r.

9.12. Гирокомпас представляет собой быстро вращающийся диск, ось которого может свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости. Исследовать движение гирокомпаса на широте α. Угловая скорость вращения Земли Ω.

9.19. а) Плоский симметричный относительно своей оси диск катится по гладкой горизонтальной плоскости(трение отсуствует). Определить закон движения диска в квадратурах.
Исследовать подробнее закон движения в следующих случаях.
Определить, при каких условиях угол наклона диска к плоскости остается постоянным.
Диск катится так, что его ось сохраняет определенное (горизонтальное) направление. Определить, при какой угловой скорости вращения вокруг этой оси такое движение устойчиво.
б) Диск катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Найти уравнения движения и ответить на те же вопросы, что и в пункте а).
в) То же для диска, который катится по горизонтальной плоскости, не проскальзывая и не проворачиваясь вокруг вертикальной оси.(Это означает, что сцепление диска с плоскостью в "точке"соприкосновения таково, что площадка в месте контакта не скользит по плоскости и не проворачивается. Потерями энергии на трение качения пренебречь.)
г) Находящийся на наклоной плоскости диск вращается без проскальзывания вокруг своего диаметра, перпендикулярного этой плоскости. Найти смещение диска за большое время. Наклонная плоскость составляет малый угол α с горизонтальной.

9.21. Найти отклонения к востоку и к югу от вертикали свободно падающего с высоты h тела. Начальная скорость тела равна нулю.

9.24. Найти малые колебания частицы m, прикрепленной пружинками жесткости k_1 и k_2 к рамке, вращающейся в своей плоскости с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$. Частица может двигаться в плоскости рамки.

VI. Канонический формализм в механике.

10.5. Найти уравнения движения частицы, функция Гамильтона которой $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{c|\mathbf{p}|}{n(\mathbf{p},\mathbf{r})}$(луч света). Найти траекторию, если $n(\mathbf{r}) = \alpha x$.

10.14.Вычислить скобки Пуассона:

$$a)\{M_i, x_j\}, \{M_i, p_j\}, \{M_i, M_j\};$$

$$b)\{\mathbf{ap}, \mathbf{br}\}, \{\mathbf{aM}, \mathbf{br}\}, \{\mathbf{aM}, \mathbf{bM}\};$$

$$c)\{\mathbf{M}, \mathbf{rp}\}, \{\mathbf{p}, r^n\}, \{\mathbf{p}, (\mathbf{ar})^2\}.$$

Здесь x_i, p_i, M_i - декартовы компоненты векторов, а $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ - постоянные векторы.

10.20. Составить уравнения движения проекции M_n момента импульса на оси, связанные со свободно вращающимся телом. Функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(I^{-1}_{\alpha\beta})M_\alpha M_\beta$$

.

10.23. Доказать, что значение любой функции координат и импульсов системы $f(p(t), q(t))$ выражается через значения p и q в момент $t = 0$ формулой:

$$f(p(t), q(t)) = f + \frac{t}{1!}\{H, f\} + \frac{t^2}{2!}\{H\{H, f\}\} + ...$$

где $f = f(p(0), q(0))$, а $H = H(p(0), q(0))$ - функция Гамильтона. (Ряд предполагается сходящимся.)
Вычислить с помощью этой формулы $p(t), q(t), p(t)^2, q(t)^2$ для:
а)частицы в однородном поле;
б)осциллятора.

10.25. а)Пусть функция Гамильтона зависит от переменных q_1, p_1 лишь через посредство функции $f(q_1, p_1)$

$$H = H(f(q_1, p_1), q_2, p_2, ..., q_N, p_N).$$

Доказать, что $f(q_1, p_1)$ есть интеграл движения.
б)Найти интегралы движения частицы в поле $U(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{ar}}{r^3}$ (использовать сферические координаты).

11.12. Каков смысл канонического преобразования, задаваемого производящей функцией $\Phi(q, P) = \alpha qP$?

11.16. Выяснить смысл канонических преобразований, задаваемых производящими функциями:

$$a)\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \mathbf{rP} + \delta\mathbf{aP};$$

$$b)\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \mathbf{rP} + \delta\varphi[\mathbf{rP}];$$

$$c)\Phi(q, P, t) = qP + \delta\tau H(q, P, t);$$

$$d)\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \mathbf{rP} + \delta\alpha(\mathbf{r}^2 + \mathbf{P}^2).$$

где $\mathbf{r}$ - декартовы координаты, а $\delta\mathbf{a}, \delta\varphi, \delta\tau, \delta\alpha$- бесконечно малые параметры.

11.19.Каноническое преобразование задано производящей функцией $\Phi(q, P) = qP + \lambda W(q, P)$, где $\lambda \to 0$. Для произвольной функции $f(q, p)$ найти с точностью до первого порядка малости изменения ее величины, связанное с изменениям аргументов

$$\delta f(q,p) = f(Q,P) - f(q,p)$$

.

12.15. Короткая магнитная линза образована полем, определяемым векторным потенциалом $A_\varphi = \frac{1}{2} r \mathcal{H}_z(z), A_r = 0, A_z = 0$ ($\mathcal{H}_z$ отлично от нуля в области $|z| < a$). Из точки $(0, 0, z_0)$ на линзу падает пучок электронов, близких к оси z. Найти точку $(0, 0, z_1)$, где пучок будет сфокусирован. Предполагается, что $z_0, z_1 \gg a$. *Указание.*Интеграл уравнения Гамильтона-Якоби искать в виде разложения по степеням r

$$S(r, \varphi, z, t) = -Et + p_\varphi \varphi + f(z) + r\psi(z) + \frac{r^2}{2}\sigma(z) + ...$$

12.18. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании уравнений движения с помощью полного интеграла уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(-\frac{\partial S}{\partial p}, p, t) = 0,$$

где $H(q, p, t)$- функция Гамильтона.(Уравнения Гамильтона-Якоби в p-представлении.)

13.12. На осциллятор действует сила $F(t)$. Найти зависимость адиабатического инварианта $I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq$ от времени.

VII. Механика калибровочных систем

VIII. Механика сплошных сред. Элементы теории упругости

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика, 1973.

2. М.Голдстейн. Классическая механика, 1957.

3. Ф.Р. Гантмахер. Лекции по аналитической механике. Москва, Физматлит, 2002.

4. Э. Уиттекер. Аналитическая динамика. Изд. дом "Удмуртский университет 1999.

МАТЕМАТИКА II.

I. Голоморфные функции. Аналитическое продолжение

1. Продифференциировать функции e^z, z^2, $\overline{z}^2$, $f(z) = xy$. В каких точках существуют их (комплексные) производные?

2. Восстановить аналитическую в комплексной плоскости функцию $f(z)$ по следующим данным:

$$\operatorname{Re} f(z) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3\,, \quad f(0) = 0\,.$$

II. Ряды Лорана

Разложить функцию $f(z) = 1/z^2$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = i$.

2. Разложить следующую функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$:

$$f(z) = \frac{2z^2 + 4z - 1}{2z^2 - 3z - 2}\,.$$

Определить радиус сходимости ряда.

3. Разложить следующую функцию в ряд Лорана по степеням z во всех максимальных кольцах, в которых это возможно:

$$f(z) = 1 + \frac{1}{1 + 2z} + \frac{3}{z - 2}\,.$$

В каких кольцах эта функция разлагается в ряд Лорана по степеням $(z - 2)$? по степеням $(z - 2i)$?

4. Разложить функцию $f(z) = z^3 \sin(1/z)$ в ряд Лорана по степеням z во всех максимальных кольцах, в которых это возможно.

III. Изолированные особые точки. Вычеты

1. Определить особые точки и тип особенности у следующих функций:

$$\frac{z^{20}}{(z-1)^3(z^2+4)^2}\,, \quad \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}\,, \quad \frac{e^{2z} - 1}{z^2}\,, \quad \exp\left(\cos\frac{1}{z}\right)\,, \quad \frac{z^3}{(z-1)^3 \sin\frac{1}{z}}\,, \quad \frac{z^4}{\sin\frac{z}{z+i}}\,.$$

2. Найти вычеты во всех изолированных особых точках следующих функций:

$$z \cos\frac{1}{z}\,, \quad \frac{1}{z^3 - z^5}\,.$$

IV. Выделение регулярных ветвей многозначных функций

1. Выделить регулярную ветвь $f(z)$ функции $\operatorname{Ln} z$ в области с разрезом вдоль положительного луча вещественной оси, определяемую условием $f\left(e^{\pi i/6}\right) = 37\pi i/6$. Найти $f\left(2e^{\pi i/3}\right)$.

2. Та же задача в области с разрезом вдоль линии $x = y$, $x \geq 0$.

3. Разложить функции из предыдущих примеров в ряд Тейлора в окрестности точки $z = i$.

4. Выделить регулярную ветвь $f(z)$ функции $\operatorname{Ln}(4 + 3z - z^2)$ в области с разрезами вдоль лучей вещественной оси $x \leq -1$, $x \geq 4$ такую что $f(0) = \ln 4$. Найти $f(1)$, $f(5 + i0)$, $f(5 - i0)$, $f(i)$, $f'(i)$ и разложить $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности $z = 1$.

5. Пусть $f(z)$ – регулярная ветвь функции $z^{1/3}$ в комплексной плоскости с разрезом вдоль луча вещественной оси $x \geq 0$ такая что $f(1 + i0) = e^{2\pi i/3}$. Разложить $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = -2i$.

6. Пусть $f(z)$ – регулярная ветвь функции $(1 + z^2)^{1/3}$ в комплексной плоскости с разрезами вдоль $x + i$, $x \leq 0$, $x \geq 1$; $-i + t(1 + 2i)$, $0 \leq t \leq 1$ такая что $f(3i) = -2$. Вычислить $f(2i)$, $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ и найти несколько первых членов разложения $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 2i$.

V. Вычисление интегралов с помощью вычетов

1. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{dz}{z^3 - z^5}\,, \quad \gamma : |z - 1/2| = 1\,.$ 2. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{dz}{e^z - 1}\,, \quad \gamma : |z - \pi i| = 4.$

3. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{dz}{(z-1)^2 \sin\frac{1}{z}}\,, \quad \gamma : |z| = 1/2\,.$ 4. $\displaystyle\oint_\gamma \sin\frac{z+2}{1-z}dz\,, \quad \gamma : |z| = 3.$

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx.$ 6. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx$ (интеграл Лапласа). 7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+5)\sin 3x}{x^2 - 6x + 10}\,dx.$

8. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2}.$ 9. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\frac{dx}{x^2+1}.$ 10. $\displaystyle\int_2^5 \frac{x\,dx}{\left[(x-2)^4(5-x)\right]^{1/5}}.$

11. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\,dx.$

VI. Конформные преобразования

VII. Интегральные уравнения

VIII. Асимптотические методы

IX. Дифференциальные уравнения математической физики

X. Элементы теории специальных функций

ЛИТЕРАТУРА

1. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, 1972
2. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. Москва, Наука, 1972
3. Г.П. Головач, О.Ф. Калайда. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь. Київ, Техніка, 1997

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

I. Специальная теория относительности.

II. Релятивистская механика.

III. Заряд в электромагнитном поле.

IV. Уравнения электромагнитного поля.

V. Постоянное электромагнитное поле.

VI. Электромагнитные волны.

VII. Излучение электромагнитных волн - 1.

VIII. Постоянное магнитное поле.

IX. Квазистационарное электромагнитное поле.

X. Электромагнитное поле в среде.

XI. Рассеяние электромагнитных волн.

XII. Излучение электромагнитных волн - 2.

XIII. Принципиальные проблемы классической электродинамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. М.: Наука, 1973.
2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
3. В.Л.Гинзбург. Теоретическая физика и астрофизика. М.: Наука, 1981.
4. Дж. Джексон. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. Наука, М., 1973.
2. В.А.Фок. Теория пространства, времени и тяготения. Физмат. М., 1977.
3. С.Вайнберг. Гравитация и космология. Мир., М., 1975.

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА.

I. Общие принципы квантовой механики

II. Уравнение Шредингера

III. Движение в центральном поле

IV. Квазиклассическое приближение

V. Теория возмущений

VI. Группы симметрии в квантовой механике

VII. Тождественность частиц

VIII. Упругие и неупругие столкновения

IX. Квантовая механика и интегралы по траекториям

X. Релятивистская квантовая механика

X. Принципиальные проблемы квантовой механики

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика.
2. А.С.Давыдов. Квантовая механика.
3. А.Мессиа. Квантовая механика, т. 1, 2.
4. Д.Д.Бьеркен, С.Д.Дрелл. Релятивистская квантовая теория, т. 1.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. П.А.Дирак. Принципы квантовой механики.
2. Е.Вигнер. Теория групп и ее приложение к квантовой механике.
3. Д.Хиббс, Р.Фейнман. Квантовая механика и интегралы по траекториям.

МАТЕМАТИКА III

I. Элементы анализа на многообразиях

II. Теория групп Ли

III. Элементы теории представления

IV. Гамильтонова механика на многообразиях

V. Элементы теории обобщенных функций

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М., Наука, 1986.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Теории гомологий. М., Наука, 1984.
3. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. М., Наука, 1978.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М., Наука, 1974.
5. Желобенко Д.П. Компактные группы Ли и их представление. М., Наука, 1970.
6. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М., Мир, 1964.
7. Наймарк М.А. Теория представлений групп. М., Наука, 1976.
8. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., ГИФМЛ, 1958.
9. Спрингер Дж. Введение в терию римановых поверхностей. М., ИЛ, 1960.
10. Гото М., Гроссханс Ф. Полупростые алгебры Ли. М., Мир, 1981.
11. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА.

I. Основные принципы статистики

II. Термодинамические величины

III. Распределение Гиббса

IV. Флуктуации

V. Термодинамика идеальных газов

VI. Плотные газы

VII. Фазовые переходы первого и второго рода

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Статистическая физика. Наука, М., 1976.
2. Т.Хилл. Статистическая механика. ИЛ, 1960.
3. К.Хуанг. Статистическая механика. Мир, М., 1966.
4. Ю.Б.Румер, М.Ш.Рывкин. Термодинамика, статистическая физики и кинетика. Наука, М., 1977.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А.Исихара. Статистическая механика. Мир. М., 1973.
2. Р.Кубо. Статистическая физика. Мир. М., 1968.
3. Г.Стенли. Фазовые переходы и критические явления.
4. Ш.Ма. Современная теория критических явлений.
5. А.З.Паташинский, В.Л.Покровский. Флуктуационная теория фазовых переходов.

ФИЗИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА И ГИДРОДИНАМИКА.

I. Уравнение Лиувилля

II. Динамическая теория

III. Кинетические уравнения

IV. Стохастические процессы

V. Гидродинамика

VI. Элементы теории плазмы

ЛИТЕРАТУРА

1. Р.Балеску. Равновесная и неравновесная статистическая механика. Мир. М., 1978, т. 32.
2. А.И.Ахиезер, С.В.Пелетминский. Методы статистической физики. Наука. М., 1977.
3. И.А.Квасников. Термодинамика и статистическая физика. Теория неравновесных систем. И-во МГУ, 1987.
4. Ю.Л.Климонтович. Статистическая физика. Наука. М., 1982.
5. Е.М.Лифшиц, Л.Д.Ландау. Гидродинамика.

ТЕОРИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

I. Симметрия кристаллических решеток

II. Метод вторичного квантования

III. Электроны в кристалле в поле периодического потенциала

IV. Электронный газ со взаиодействием

V. Электрон-фононное взаимодействие

VI. Метод функций Грина в теории твердого тела

VII. Сверхтекучесть

VIII. Сверхпроводимость

IX. Кинетические свойства

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ч.Киттель. Квантовая теория твердых тел.
2. Дж.Займан. Принципы теории твердого тела.
3. Н.Ашкрофт, Н.Мермин. Физика твердого тела. Т. 1, 2.
4. Л.Д.Ландау. Квантовая механика.
5. Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Статистическая физика. Ч. 2.
6. А.С.Давыдов. Теория твердого тела.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А.А.Абрикосов, Л.П.Горьков, Е.М.Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике.

2. Х.Хакен. Квантовополевая теория твердого тела.

3. Э.Г.Петров. Теория магнитных экситонов.

4. Н.П.Мотт. Переход металл-изолятор.

5. А.Анималу. Квантовая теория кристаллических твердых тел.

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

I. Релятивизм и квантовая механика

II. Квантование свободного поля

III. Взаимодействующие поля, матрица рассеяния, свойства симметрии

IV. Методы теории возмущений

V. Радиационные поправки и общий метод перенормировки

VI. Функциональные методы. Квантование неабелевых калибровочных теорий

VII. Непертурбативные решения в КТП

VIII. Суперсимметричные теории

IX. Приложения КТП

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантовых полей. Наука, М., 1976.
2. К.Ициксон, Ж.-Б.Зюбер. Квантовая теория поля, т. I, II, Мир, М., 1984.
3. Дж.Д.Бьеркен, С.Д.Дрелл. Релятивисткая квантовая теория. Т. I, II, Наука. М., 1978.
4. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика. Наука, М., 1969.
5. А.А.Славнов, Л.Д.Фаддеев. Введение в теорию калибровочных полей. Наука, М., 1987.

6. П.Рамон. Теория поля. Современный вводный курс. Мир., М., 1984.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. Ил. М., 1963.
2. Н.Н.Боголюбов, А.А.Логунов, И.Т.Тодоров. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. Наука, М., 1969.
3. Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Релятивистская квантовая теория. Т. II, Наука, М., 1971.
4. С.Трейман, Р.Джакив, Д.Гросс. Лекции по алгебре токов. Атомиздат, Мир., 1977.
5. Сборник "Квантовая теория калибровочных полей". Мир. М., 1977.
6. Дж.Коллинз. Перенормировка. Мир. М., 1988.
7. И.Весс Дж.Беггер. Суперсимметрия и супергравитация. Мир. М., 1986.
8. Грин, Шварц, Виттен. Теория суперструн. т. 1-2