Непрерывный спектр лёгких атомных ядер остаётся интересной и важной проблемой, уже много лет привлекающей внимание теоретиков и экспериментаторов. Обьяснение тому простое. Эти ядра, как правило, имеют лишь небольшое число состояний дискретного спектра. Подавляющее число их возбуждённых состояний находится в непрерывном спектре.

Принципиальные трудности, возникающие при исследовании непрерывного спектра, были преодолены сотрудниками нашего отдела. Однако задачи постепенно усложняются и требуется развитие новых подходов, упрощающих испоьзование уже найденных приёмов и создающих условия для изучения всё более сложных ядерных систем.

Тем, кто хотел бы участвовать в исследовании непрерывного спектра лёгких ядер, предлагается несколько задач, решение которых помогло бы проникнуть в "тайны"метода, предложенного сотруниками отдела структуры атомных ядер. В задачах, представленных далее, максимально упрощаются реальные условия, но так, что принципиальные особенности ядерных систем сохраняются.

Мы будем рассматривать одномерное уравнение Шредингера с потенциальной энергией притяжения гауссовского типа:

$$\left\{-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}-\exp(-\alpha x^2)\right\}\Psi(x)=E\Psi(x);\ \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}=\hat{T},\ -\exp(-\alpha x^2)=V\hat{(x)}.$$

Вместо того, чтобы решать дифференциаьное для волновой функции $\Psi(x)$ уравнение, мы представим эту функцию в виде ряда - разложения по полиномам Эрмита

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \psi_n(x),\ \ \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^2 n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

и сведём задачу к системе алгебраических уравнений для коэффициентов разложения C_n.

Вопросы:

1. Найти матричные элементы оператора кинетической энергии

$$< n|\hat{T}|\tilde{n} > .$$

Ответ:

В единицах

$$\frac{\hbar^2}{m r_0^2},$$

где r_0 - осцилляторный радиус,

$$< 2n|\hat{T}|2\tilde{n} - 2 >= -\frac{\sqrt{2n(2n-1)}}{4},\ \ < 2n|\hat{T}|2\tilde{n} >= n + \frac{1}{4},$$

$$< 2n|\hat{T}|2\tilde{n} + 2 >= -\frac{\sqrt{(2n+2)(2n+1)}}{4}.$$

2. С помощью производящей функции для полиномов Эрмита найти матричные элементы оператора потенциальной энергии

$$< 2n|\hat{V}(x)|2\tilde{n} > .$$

Ответ:

$$< 2n|\hat{V}(x)|2\tilde{n} >= V_0 z^{1/2}(-1+z)^{n+\tilde{n}}\sqrt{\frac{(2n-1)!!(2\tilde{n}-1)!!}{(2n)!!(2\tilde{n})!!}}\,{}_2F_1\left\{-n,-\tilde{n};\frac{1}{2};\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\right\},$$

где

$$\frac{1}{z} = 1 + \frac{r_0^2}{b_0^2},$$

r_0 - осцилляторная длина, а b_0 - радиус гауссовского потенциала.

3. Объяснить, как выводится система уравнений

$$\sum_{\tilde{n}}^{\infty} < n|\hat{H}|\tilde{n} > C_{\tilde{n}} = EC_n,\ \ \hat{H} = \hat{T} + \hat{V};\ \ n = 0, 1, 2, 3, ...$$

4. Показать, что при $n \gg 1$ уравнения для коэффициентов C_{2n} упрощаются и принимают вид

$$\frac{4n+1}{4}\left(C_{2n-2} - 2C_{2n} + C_{2n+2}\right) - \frac{1}{2}\left(C_{2n+2} - C_{2n-2}\right) - \frac{1}{4}\,\frac{1}{4n+1}C_{2n} + 2EC_{2n} = 0.$$

5. Проследить за тем, как последнее уравнение становится дифференциальным уравнением второго порядка

$$\left(\frac{4n+1}{4}\,\frac{d^2}{dn^2} - \frac{d}{dn} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{4n+1} + 2E\right)C(n) = 0,$$

и показать, что решениями этого уравнения являются функции Бесселя и Неймана - $J_{1/2}(\sqrt{2E(4n+1)})$ и $N_{1/2}(\sqrt{2E(4n+1)})$.

Результат этого анализа - явный вид коэффициентов $C(n)$ при больших значениях n.

6. Уравнение Шредингера в координатном представлении

$$\left\{-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} - \exp(-\alpha x^2)\right\}\Psi(x) = E\Psi(x)$$

по мере увеличения $|x|$ упрощается и с точностью до экспоненциально малых величин становится волновым уравнением свободного движения

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = E\Psi(x).$$

В дискретном представлении (иногда его называют энергетическим представлением) в силу принципа соответствия между дискретным и континуальным представлениями должно происходить то же самое и потому в пределе больших значений n следует ожидать предельный переход от уравнений

$$\sum_{\tilde{n}}^{\infty} < n|\hat{H}|\tilde{n} > C_{\tilde{n}} = EC_n$$

к уравнениям

$$\sum_{\tilde{n}}^{\infty} < n|\hat{T}|\tilde{n} > C_{\tilde{n}} = EC_n.$$

Используя полноту базиса полиномов Эрмита и поведение полиномов Эрмита при $n \gg 1$, показать, что этот предельный переход справелив также с точностью до экспоненциально малых величин, если только осцилляторная длина много меньше радиуса взаимодействия нуклонов.

Для решения последней задачи уместно использовать следующие формулы. Во-первых, условие полноты.

$$\sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} \psi_{2\tilde{n}}(x)\psi_{2\tilde{n}}(x') = \frac{1}{2}\delta(x-x');$$

Во-вторых, волновую функцию свободного движения.

$$\Psi(x) = \sin\sqrt{2E}x + \tan\delta\,\cos\sqrt{2E}x.$$

Наконец, предельное соотношение при $n \gg 1$.

$$\psi_{2n}(x) = \psi_{2n}|x|^{1/2}\frac{1}{|x|^{1/2}} \to \delta(|x| - \sqrt{4n+1})\frac{1}{\sqrt[4]{4n+1}}.$$

$$< 2n|V|2\tilde{n} >= \int \psi_{2n}(x)V(x)\psi_{2\tilde{n}}dx.$$

$$\frac{1}{2}\int \psi_{2n}(x)V(x)\Psi(x)dx. = \frac{1}{2}\int \psi_{2n}(x)|x|^{1/2}\frac{1}{|x|^{1/2}}V(x)\Psi(x)dx =$$

$$= \int \delta(\sqrt{4n+1} - |x|)\frac{1}{|x|^{1/2}}V(x)\Psi(x)dx =$$

$$= \int \delta(\sqrt{4n+1} - x)\, V(x) dx \left\{ \frac{\sin\sqrt{2E}\sqrt{4n+1}}{\sqrt[4]{4n+1}} + tg\delta \frac{\cos\sqrt{2E}\sqrt{4n+1}}{\sqrt[4]{4n+1}} \right\}$$

$$V(x) = \exp\left(-\frac{r_0^2}{b_0^2}x^2\right); \;\; \psi_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}}} H_{2n}(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Все предложенные упражнения могут научить тех, кто хотел бы научиться, сводить поставленную задачу к максимально простой, сохранив её главное содержание в условиях, когда выводы становятся прозрачными и понятными даже для "человека с улицы".

Дополнительные вопросы и замечания.

1. Производящая функция для полиномов Эрмита:

$$\frac{1}{\pi^{1/4}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}Rx - \frac{R^2}{2}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} R^n \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Эта производящая функция каждому из полиномов Эрмита

$$\frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

ставит в соответствие его образ

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} R^n, \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + i\eta),$$

определённый в пространстве Фока-Баргманна. Показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n!} R^n S^n \exp\left(-RS\right) \frac{d\xi d\eta}{2\pi} = 1, \;\; S = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - i\eta).$$

В таком случае обычно говорят, что интегрирование выполняется с мерой Баргманна. Несомненно, образ проще оригинала, а его замечательная особенность состоит в том, что он является целой аналитической функцией комплексной переменной R.

Производящую функцию можно рассматривать в качестве ядра интегрального преобразования, осуществляющего переход от координатного представления к представлению Фока-Баргманна. В свою очередь ядром обратного преобразования, восстанавливающего оригинал по его образу, является выражение

$$\frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}Sx-\frac{S^2}{2}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}S^n\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}H_n(x)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Нередко это ядро, как и ядро перехода от оригиала к изображению, называют модифицированной орбиталью Блоха-Бринка.

Чтобы привыкнуть к гипергеометрической функции и проверить расчёты, проводимые с ней, можно использовать упрощение, возможное в случае, когда $z = 1/2$, а

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)^2 = 1.$$

В этом случае

$${}_2F_1\left\{-n,-\tilde{n};\frac{1}{2};\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\right\}={}_2F_1\left\{-n,-\tilde{n};\frac{1}{2};1\right\}=\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n+\tilde{n}+1/2)}{\gamma(n+1/2)\Gamma(\tilde{n}+1/2)}.$$

Тогда для $z = 1/2$ справеливо такое выражение

$$< 2n|\hat{V}|2\tilde{n} >= V_0 1\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+\tilde{n}}\sqrt{\frac{(2n-1)!!(2\tilde{n}-1)!!}{(2n)!!(2\tilde{n})!!}}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n+\tilde{n}+1/2)}{\gamma(n+1/2)\Gamma(\tilde{n}+1/2)}.$$

И новое выражение и старое должны дать одинаковое значение матричного лемента, если $z = 1/2$.

Некоторые общие положения, касающиеся преставления Фока-Баргманна.

Собственная функция оператора координаты $\hat{x}$ в представлении Фока-Баргманна:

$$\Psi_x(R) = \frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}Rx - \frac{R^2}{2}\right\}.$$

Она же является производящей функцией для ортонормированного базиса одномерного гармонического осциллятора в координатном преставлении, т.е.

$$\Psi_x(R) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}R^n\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}H_n(x)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Оператор координаты

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial R} + R\right).$$

Собственная функция оператора импульса $\hat{k}$ в том же представлении:

$$\Psi_k(R) = \frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\left\{-\frac{k^2}{2} + i\sqrt{2}Rk + \frac{R^2}{2}\right\}.$$

В то же время она является производящей функцией для ортонормированного базиса одномерного гармонического осциллятора в импульсном представлении:

$$\Psi_k(R) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} R^n \frac{i^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Оператор импульса

$$\hat{k} = -i\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial R} - R\right).$$

Убедиться в том, что

$$\hat{x}\Psi_x(R) = x\Psi_x(R); \;\; \hat{k}\Psi_k(R) = k\Psi_k(R).$$

Как нормированы функции $\Psi_x(R)$ и $\Psi_k(R)$? Показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{x'}(S)\Psi_x(R)\exp(-RS)\frac{d\xi d\eta}{2\pi} = \delta(x - x');$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{k'}(S)\Psi_k(R)\exp(-RS)\frac{d\xi d\eta}{2\pi} = \delta(k - k').$$

Производящий матричный элемент для парциальных матричых элементов оператора потенциальной энергии гауссовского взаимодействия в координатном представлении.

$$\Psi_x(S)\hat{V}(x)\Psi_x(R) = V_0\frac{1}{\pi^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{z}x^2 + \sqrt{2}(R+S)x - \frac{R^2}{2} - \frac{S^2}{2}\right\}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(S)\hat{V}\Psi_x(R)dx = V_0 z^{1/2}\exp\left\{zRS - \frac{1-z}{2}(R^2 + S^2)\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} V_0 z^{1/2}(-1+z)^{n+\tilde{n}}\sqrt{\frac{(2n-1)!!(2\tilde{n}-1)!!}{(2n)!!(2\tilde{n})!!}}\,{}_2F_1\left\{-n,-\tilde{n};\frac{1}{2};\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{(2n)!}}R^{2n}\frac{1}{\sqrt{(2\tilde{n})!}}S^{2\tilde{n}}+...;\;\;\frac{1}{z}=1+\frac{r_0^2}{b_0^2}.$$

Потенциал Гаусса в импульсном представлении:

$$\hat{V}(k)=V_0\frac{b_0}{\sqrt{2}r_0}\exp\left\{-\frac{b_0^2}{4r_0^2}k^2\right\};\quad\frac{1}{\bar{z}}=1+\frac{b_0^2}{4r_0^2}.$$

Производящий матричный элемент для парциальных матричых элементов оператора потенциальной энергии гауссовского взаимодействия в импульсном представлении.

$$\Psi_k(S)\hat{V}(k)\Psi_k(R)=V_0\frac{1}{\pi^{1/2}}\frac{b_0}{\sqrt{2}r_0}\exp\left\{-\frac{1}{\bar{z}}k^2+i\sqrt{2}(R-S)k+\frac{R^2}{2}+\frac{S^2}{2}\right\}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_k(S)\hat{V}(k)\Psi_k(R)dx=V_0 2^{1/2}\sqrt{1-\bar{z}}\exp\left\{\bar{z}\bar{R}\bar{S}-\frac{1-\bar{z}}{2}(\bar{R}^2+\bar{S}^2)\right\}=$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} V_0\sqrt{1-\bar{z}}2^{1/2}(-1+\bar{z})^{n+\tilde{n}}\sqrt{\frac{(2n-1)!!(2\tilde{n}-1)!!}{(2n)!!(2\tilde{n})!!}}\,{}_2F_1\left\{-n,-\tilde{n};\frac{1}{2};\left(\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}}\right)^2\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{(2n)!}}\bar{R}^{2n}\frac{1}{\sqrt{(2\tilde{n})!}}\bar{S}^{2\tilde{n}}+....;\bar{R}=iR;\;\;\bar{S}=-iS.$$

Конечно,

$$<2n|\hat{V}(k)|2\tilde{n}>=V_0\sqrt{1-\bar{z}}2^{1/2}(-1+\bar{z})^{n+\tilde{n}}\sqrt{\frac{(2n-1)!!(2\tilde{n}-1)!!}{(2n)!!(2\tilde{n})!!}}\times$$

$$\times {}_2F_1\left\{-n,-\tilde{n};\frac{1}{2};\left(\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}}\right)^2\right\}.$$

Заслуживает внимания частный случай, когда

$$\bar{z}=\frac{1}{2}$$

и существенно упрощается гипергеометрическая функция. Её аргумент тогда становится равным единице.

Теперь матричные элементы оператора кинетической энергии:

$$\hat{T}(k)\frac{1}{\sqrt{(2n)!}}\bar{R}^{2n}=-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{R}}-\bar{R}\right)^2\frac{1}{\sqrt{(2n)!}}\bar{R}^{2n}=$$

$$=-\frac{2n(2n-1)}{4}\frac{1}{\sqrt{(2n)!}}\bar{R}^{2n-2}+\left(n+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{(2n)!}}\bar{R}^{2n}-\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{(2n)!}}\bar{R}^{2n+2}.$$

$$<2n|\hat{T}(k)|2n-2>=-\frac{\sqrt{2n(2n-1)}}{4};\ \ <2n|\hat{T}(k)|2n>=n+\frac{1}{4};$$

$$<2n|\hat{T}(k)|2n+2>=-\frac{\sqrt{(2n+2)(2n+1)}}{4}.$$

Список литературы

[1] Filippov G.F., "On taking into account correct asymptotic behavior in the oscillator-basis expansion"Sov.J.Nucl.Phys. **33**, 488-489 (1981)

[2] Filippov G.F. et al.,Few-Body Systems **33**,173 (2003)

[3] Filippov G.F., Lashko Yu.A.,Phys. Rev. C 70 (2004) 064001

[4] Moshinsky M., Smirnov Yu.F. The Harmonic Oscillator in Modern Physics

Contemporary Concepts in Physics.